	COLÉGIO PEDRO II – U. E. ENGENHO NOVO II Divisão Gráfica de segmentos e Determinação gráfica de expressões algébricas (quarta e terceira proporcional e média geométrica).	
Prof[a.] Soraya Izar	Coord. Prof. Jorge Marcelo	TURMA:
Aluno:		Nº:

1) DIVISÃO GRÁFICA DE SEGMENTOS:

1.1) Dividindo segmentos em partes iguais com mediatrizes sucessivas.

Podemos dividir segmentos em partes iguais, utilizando mediatrizes sucessivas, apenas quando o fator da divisão for resultado de uma potência de dois (2^x), ou seja 2, 4, 8,16, 32, 64, 128. Isso acontece pois cada segmento dividido por uma mediatriz será novamente dividido ao meio.

Exemplo 1:

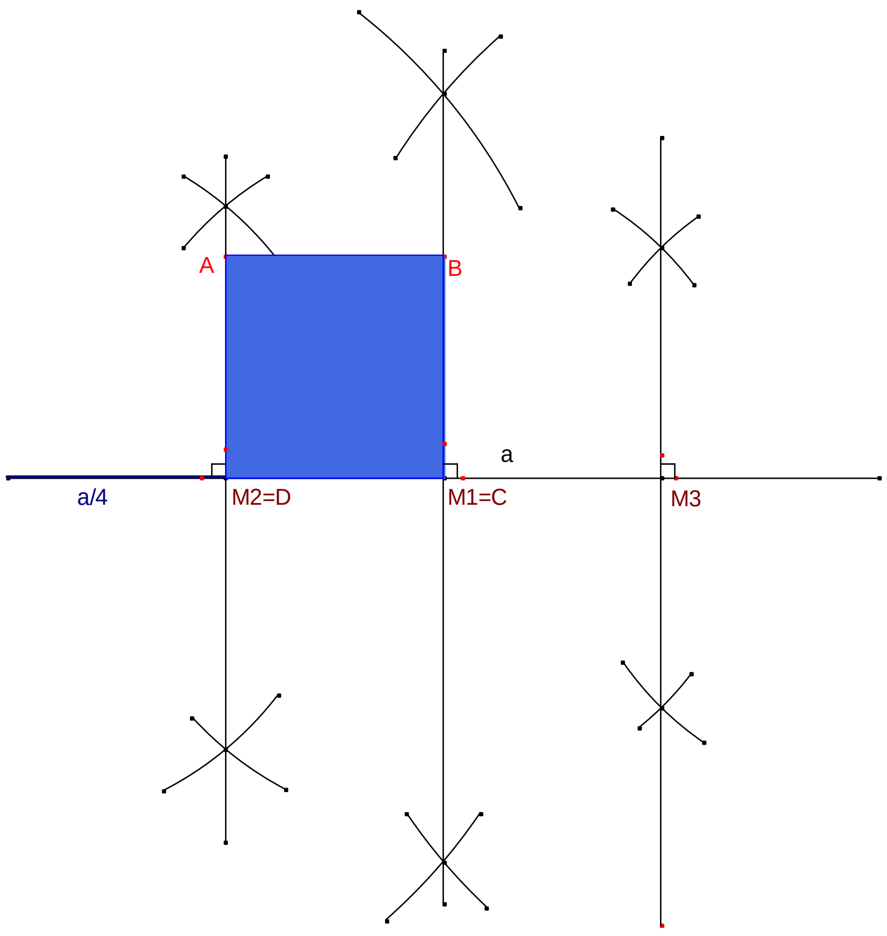
Construa o quadrado ABCD, sabendo que seu perímetro 2P é congruente ao segmento **a**, dado. Determine graficamente o lado do quadrado ABCD.

- No segmento **a** (perímetro do quadrado) estão somados (colinear e consecutivamente) os lados AB, BC, CD e AD.

- O quadrado possui lados congruentes, logo basta dividir graficamente o segmento **a** em quatro partes iguais.

- Podemos utilizar mediatrizes sucessivas para dividir o segmento **a**, pois fator da divisão (4) é potência de 2.

- O interessante desta construção é a utilização das próprias mediatrizes que dividiram o segmento **a**, para construir o quadrado, devido ao ângulo que a mediatriz forma com o segmento que divide (90º), igual aos ângulos internos do quadrado.



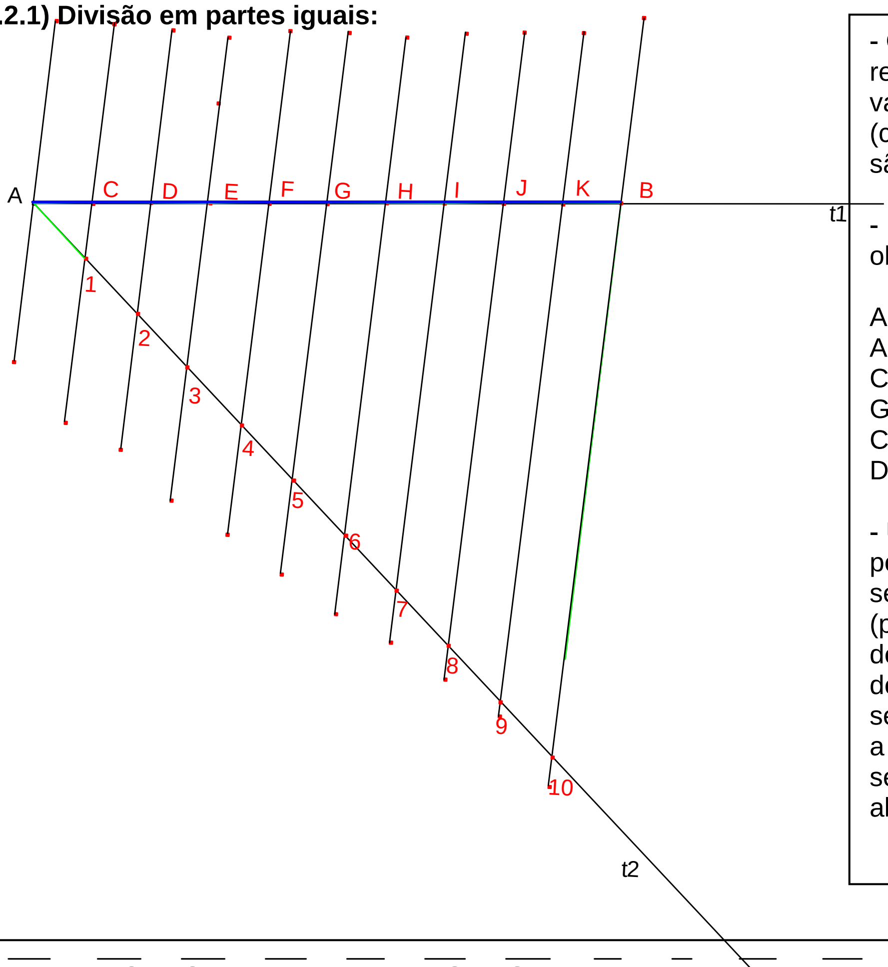
OBS: Para fatores diferentes (3, 5, 6,7,10,12,14, etc), utilizamos outro processo gráfico de divisão respaldado no Teorema de Tales.

1.2) Dividindo segmentos utilizando o Teorema de Tales.

Segundo o Teorema de Tales:

***"Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas, transversais quaisquer, segmentos correspondentes proporcionais"*.**

1.2.1) Divisão em partes iguais:



- O paralelismo entre o feixe de retas determina nas transversais vários triângulos semelhantes (caso ângulo-ângulo), cujos lados são proporcionais.

- Na figura ao lado, podemos observar que:

AB é proporcional a A10;
AC é proporcional a A1;
CG é proporcional a 15;
GB é proporcional a 510;
CD é proporcional a 12;
DE é proporcional a 23.

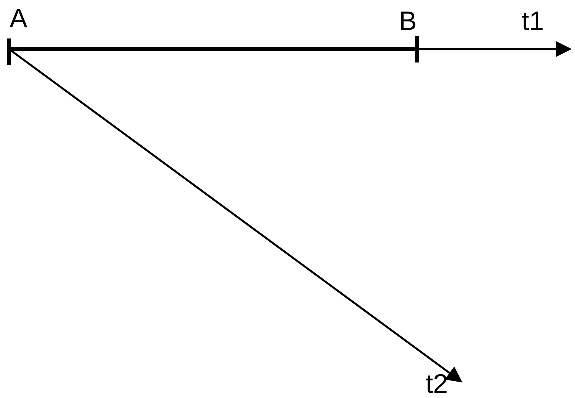
- Utilizando o Teorema de Tales, podemos dividir graficamente segmento em partes iguais (processo genérico),proporcionais, determinar graficamente frações de segmentos, razões entre segmentos e determinar a quarta e a terceira proporcional entre segmentos (expressões algébricas).

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A10}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A1}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{12}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{23}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{34}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{45}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{56}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{67}} = \frac{\overline{IJ}}{\overline{78}} = \frac{\overline{JK}}{\overline{89}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{910}}$$

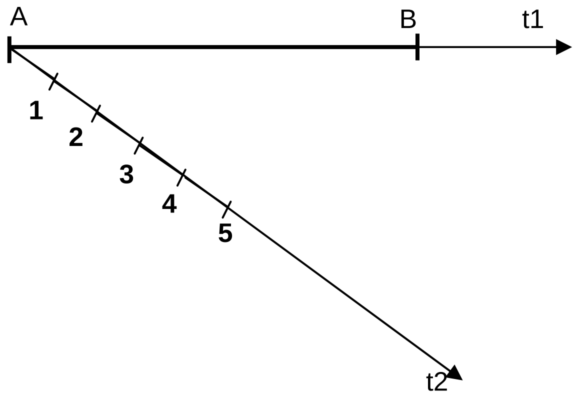
Este processo serve para dividir um segmento em um número qualquer de partes iguais (2,3,4,5,6, 7...). Por isso é denominado processo genérico.

a) Na divisão de segmentos em parte iguais, consideramos o segmento que ser quer dividir (AB) contido na transversal **t1.**

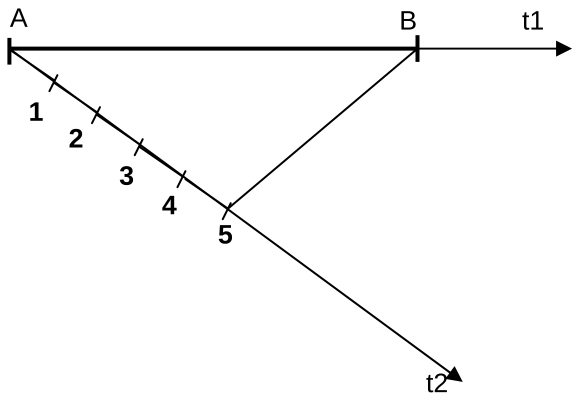
b) A segunda transversal **t2** deve começar em uma das extremidades do segmento (A), formando um ângulo qualquer (não muito agudo - fechado) com o segmento (AB).



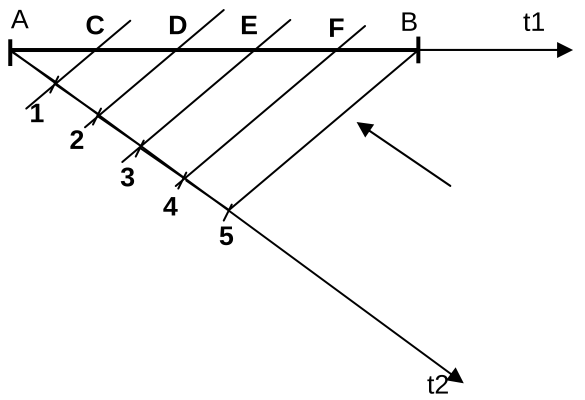
c) Escolha uma medida qualquer (arbitrária) no compasso e transporte-a para a segunda transversal **t2,** a partir da extremidade inicial (A), o mesmo número de vezes em que se quer dividir segmento dado (cinco vezes, por exemplo). **É importante que os segmentos transportados sejam congruentes, colineares e consecutivos.**



d) Ligue a ultima marcação de t2 a segunda extremidade do segmento que se quer dividir (B). Segmento que dá a direção das paralelas.



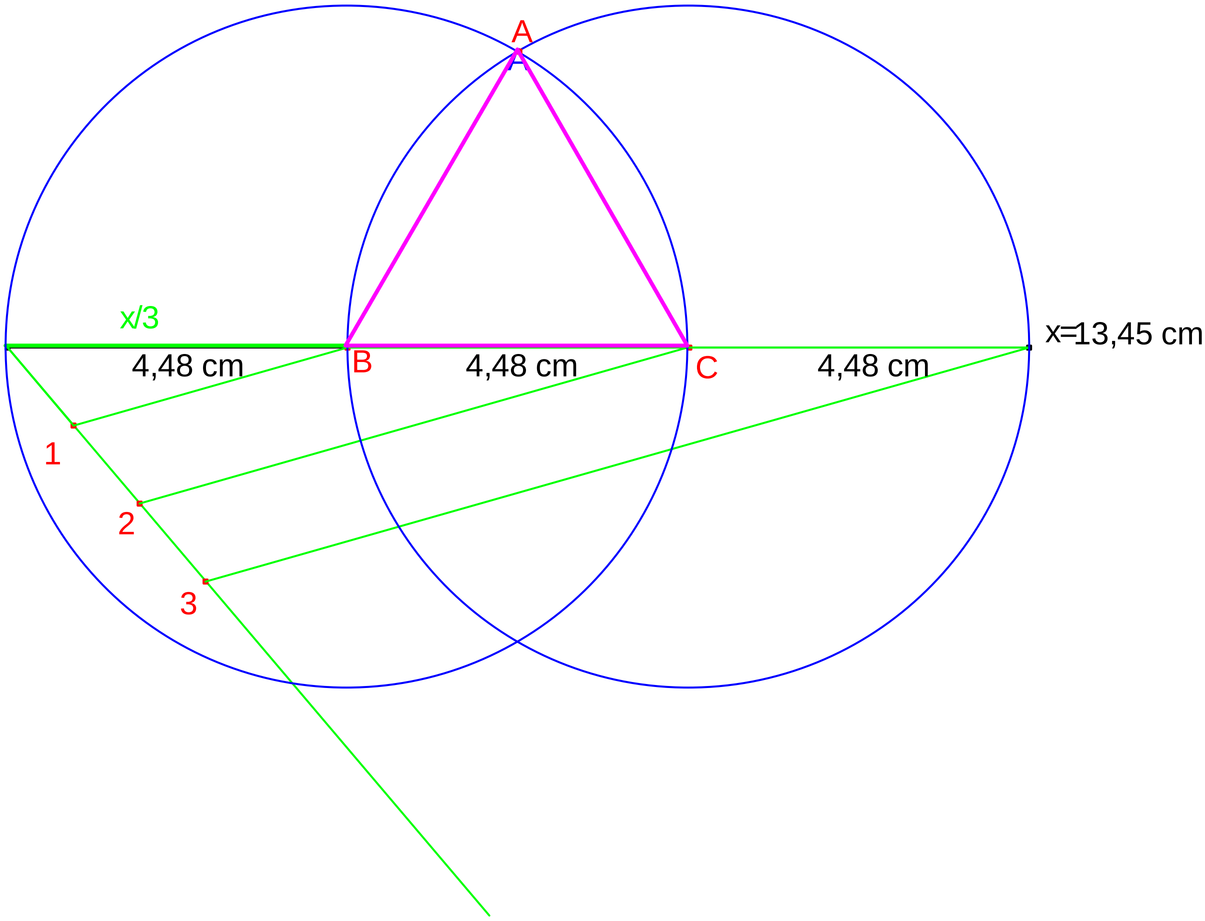
e) Com o par de esquadros, trace paralelas ao segmento traçado no item d (5B), passando pelos pontos 4, 3, 2 e 1.
Se o traçado estiver correto, o segmento AB estará dividido e cinco partes iguais, pois em t2 foram marcados cinco segmentos colineares, consecutivos e **congruentes**.
Os segmentos determinados em AB são proporcionais aos marcados em t2 (A1=12=23=34=45), logo AC=CD=DE=EF=FB.



Exemplo 2:

Determine graficamente o lado do triângulo equilátero ABC e construa-o, sabendo que seu perímetro é dado pelo segmento **x.**

x



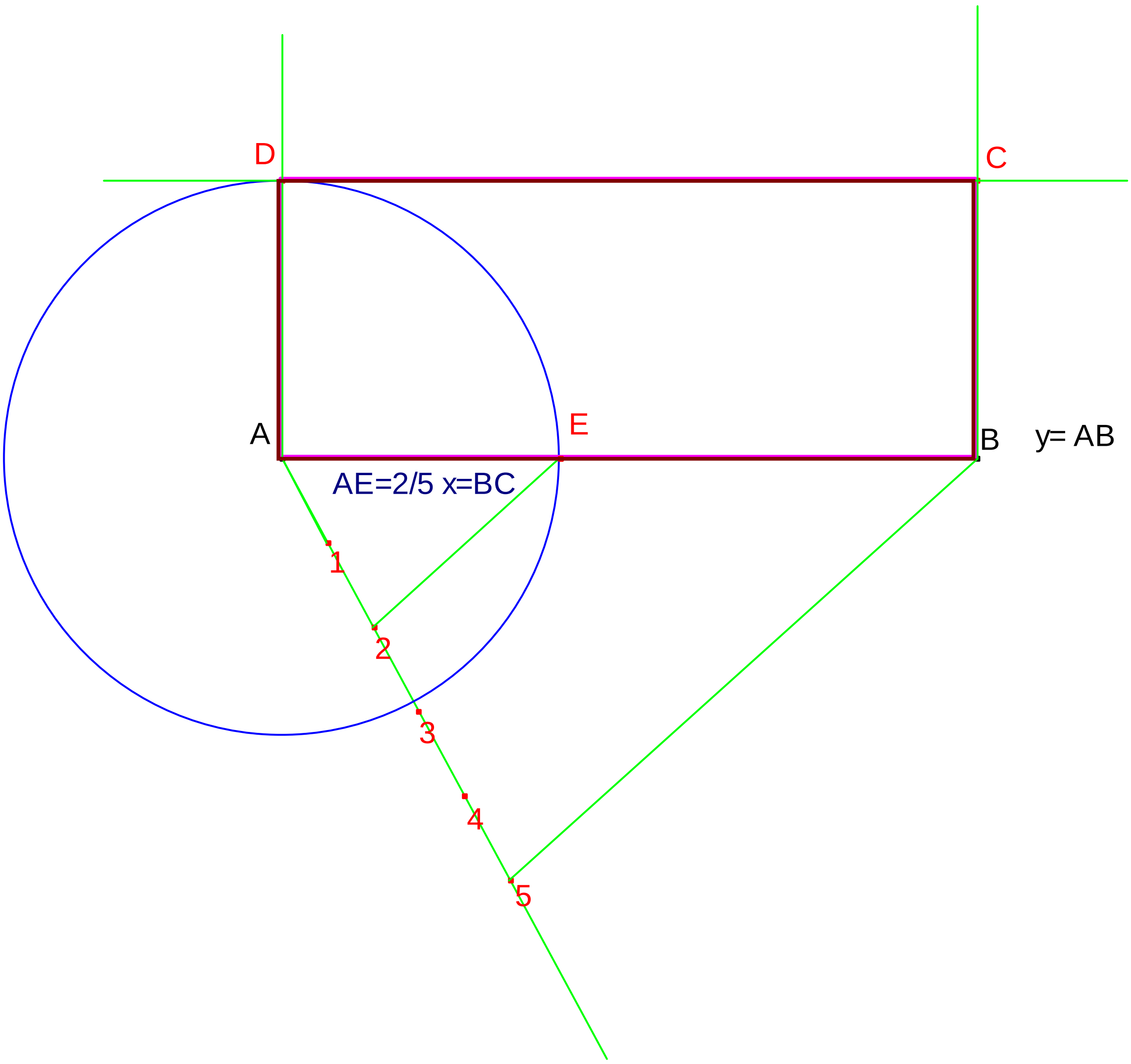
1.2.2) Divisão de segmento em frações:

Utilizando o mesmo processo podemos dividir segmentos em frações (1/3, 2/5, 3/7,4/9, etc).

Exemplo 3:

Determine graficamente os lados do retângulo ABCD e construa-o, sabendo que o lado AB ao segmento **y**, dado, e que o lado BC é igual a 2/5 de **y**.

y



1.2.3) Divisão de segmento em partes proporcionais:

<u>Relembrando o conceito de RAZÃO E PROPORÇÃO</u>

A Razão entre dois números indica quantas vezes um número está contido no outro.

Exemplo: $\frac{8}{2} = 4 \longrightarrow$ k = 4 - **<u>k</u>** é o fator de repetição entre os dois números (constante)

Utilizamos razão e proporção em várias circunstâncias de nossa vida. Na culinária é utilizada de forma prática nas receitas, conforme exemplo abaixo.

UMA RECEITA DE PANQUECA

1 tablete de margarina derretida
2 copos de farinha de trigo
2 copos de leite
3 ovos

TRÊS RECEITAS DE PANQUECA

3 tabletes de margarina derretida
6 copos de farinha de trigo
6 copos de leite
9 ovos

Se precisarmos fazer mais panquecas aumentamos a quantidade dos ingredientes na mesma proporção. Nas receitas anteriores aumentamos 3 vezes.

Vamos comparar as quantidades dos ingredientes da receita.

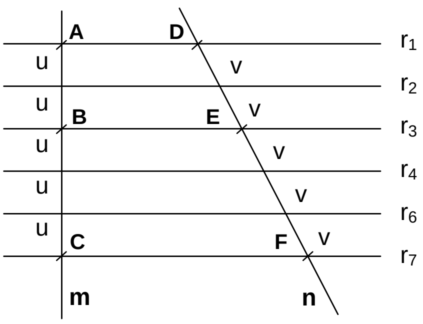
<u>Margarina</u>: $\frac{3}{1} \Rightarrow$ **k = 3** <u>farinha e leite</u>: $\frac{6}{2} \Rightarrow$ **k = 3** <u>ovos</u>: $\frac{9}{3} \Rightarrow$ **k = 3**

Observando as razões, percebemos que o fator **<u>k</u>** (constante de proporcionalidade) é o mesmo. Assim podemos igualar as razões que possuem a mesma constante **<u>k</u>**. A igualdade entre razões é denominada proporção.

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}$$

Proporção é a igualdade entre razões.

<u>Revendo o Teorema de Tales</u>



$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{2v}{3v} = \frac{2}{3}$$

Como há **igualdade entre as razões**, elas formam uma **proporção**.

Significa que a razão $\frac{AB}{BC}$ é igual à $\frac{DE}{EF}$.

Na figura acima, observamos que os segmentos AB e DE, embora de tamanhos diferentes (AB=3u e DE=2v), são determinados pelas mesmas paralelas r_1 e r_3. O mesmo acontece com os segmentos BC e EF (BC=3u e EF=3v).

AB e BC estão contidos na reta **<u>m</u>** transversal ao feixe de paralelas **<u>r</u>** (r_1 a r_7), assim como DE e EF estão contidos na reta **<u>n</u>** também transversal ao mesmo feixe de paralelas.

Ao comparamos as medidas de AB e BC estabelecendo uma razão[1], constatamos que AB está para 2u (**<u>u</u>** = unidade de medida determinada pelas paralelas em **<u>m</u>**) assim como BC está para 3u. Como as unidades de medidas são iguais, podemos dizer que AB está para BC assim com 2 está para 3.

De forma análoga, ao compararmos as medidas de DE e EF, constatamos que DE está para 2v (**<u>v</u>**= unidade de medida determinada pelas paralelas em **<u>n</u>**) assim como EF está para 3v, logo a **razão de proporcionalidade** entre DE e EF é de 2/3 **(lê se dois para três)**.

A igualdade entre duas razões forma uma proporção, conforme destacado ao lado da figura analisada.

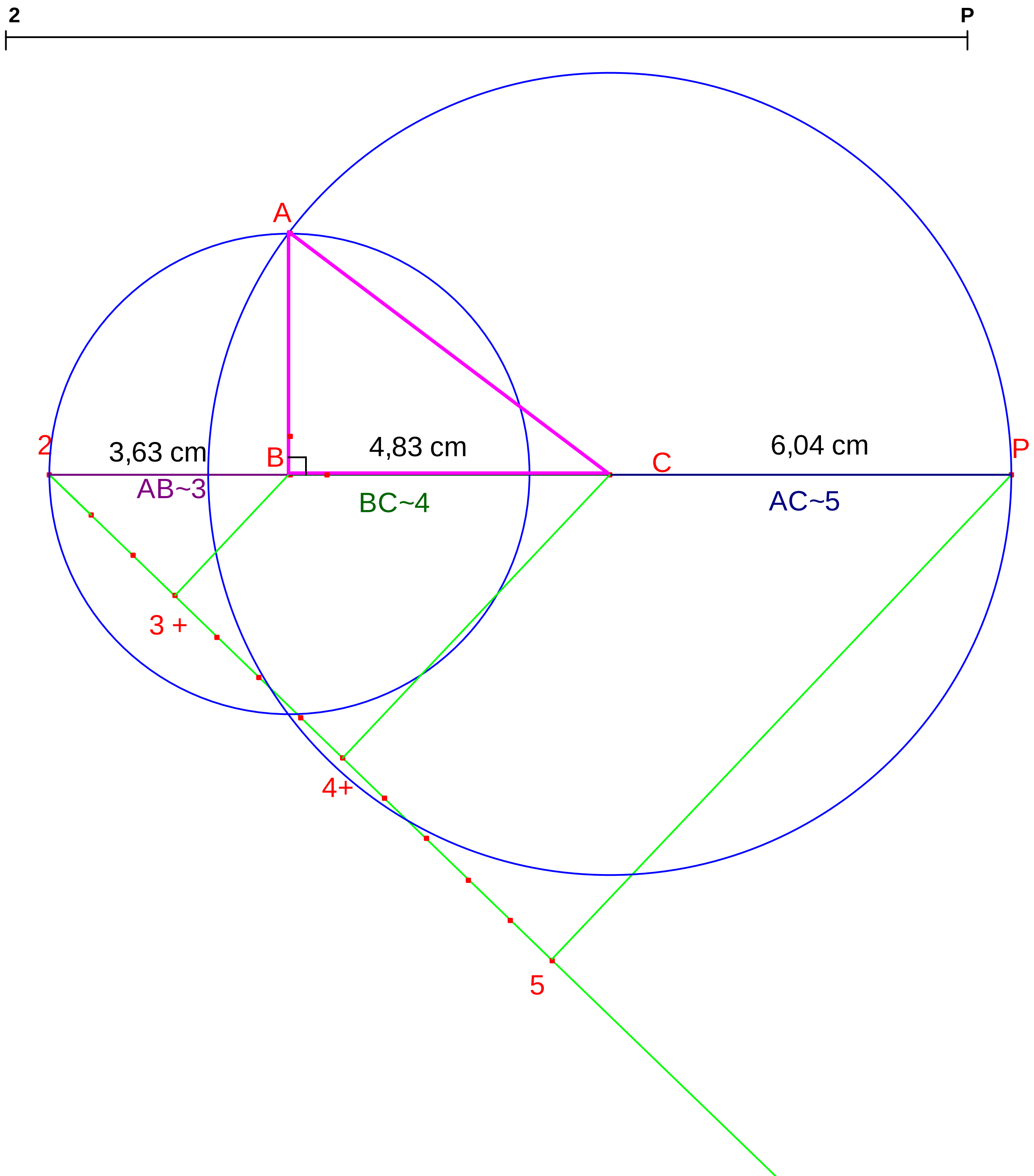
[1] Razão entre segmentos é a comparação entre seus tamanhos em uma mesma unidade de medida.

Assim, utilizando o Teorema de Tales também podemos dividir segmentos em partes proporcionais.

Exemplo 4:

Determine graficamente os lados do triangulo ABC e construa-o, sabendo que:

- o perímetro 2P é dado;



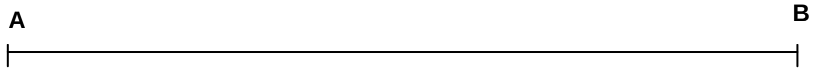
Obs: Todo triângulo com lados iguais ou proporcionais a 3,4 e 5 é um triângulo retângulo (Triângulo Pitagórico).

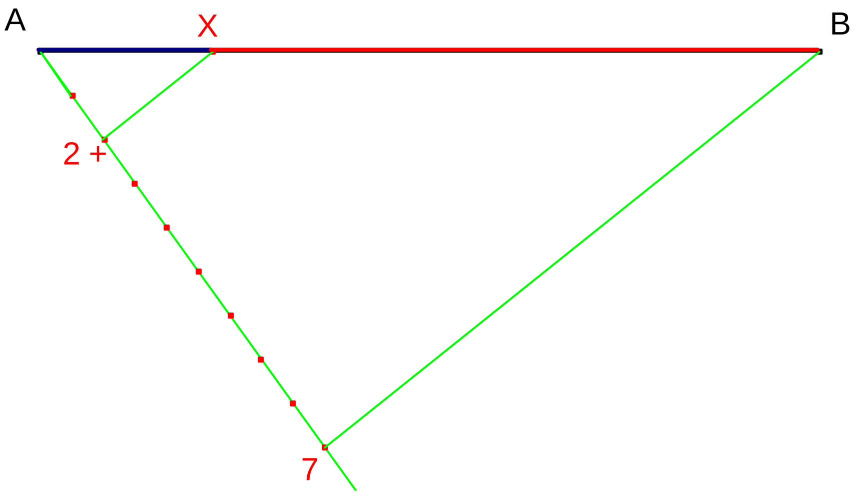
1.2.4) Divisão de segmento por uma razão conhecida:

Respaldado no Teorema de Tales podemos dividir um segmento dado em dois segmentos proporcionais aos termos de uma razão conhecida.

Exemplo 5:

Determine o ponto **X** no segmento AB, dado, segundo a **razão** $\frac{3}{7}$ (3 para 7).





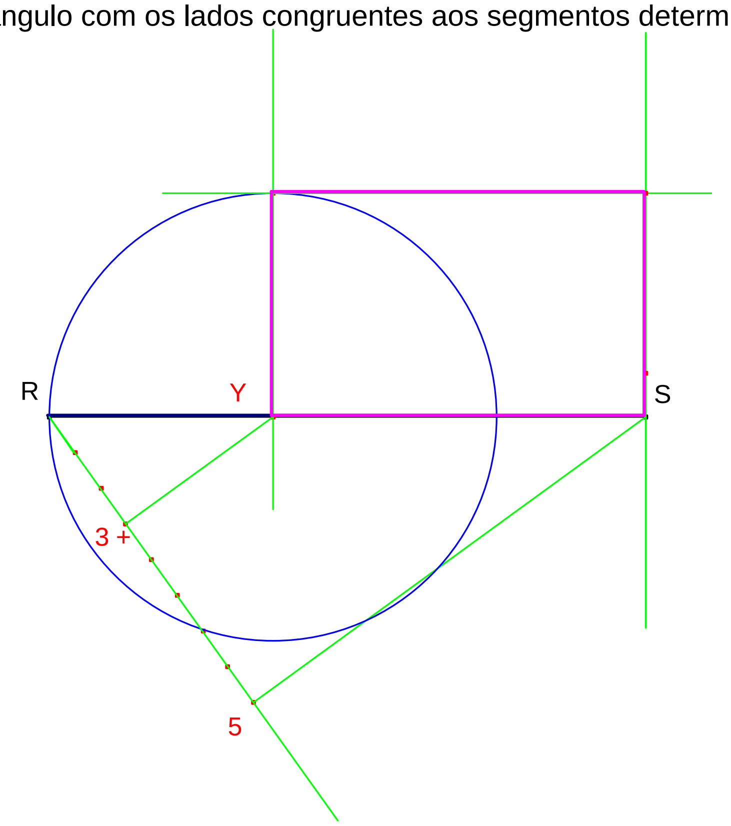
Para determinar o ponto **X,** dividimos AB em partes proporcionais a 2 e a 7.
Assim o ponto **X** determina em AB dois segmentos: AX proporcional a 2 e XB proporcional a 7, tal que:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{2}{7}.$$

Exemplo 6:

Determine o ponto Y no segmento RS, dado, de maneira que a proporção $\frac{\overline{RY}}{\overline{YS}} = \frac{3}{5}$ seja mantida.

Construa um retângulo com os lados congruentes aos segmentos determinados em RS.



2) DETERMINAÇÃO GRÁFICA DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS:

Podemos determinar graficamente algumas expressões algébricas como a quarta proporcional, terceira proporcional, média geométrica entre outras.
A quarta e a terceira proporcional são aplicações gráficas do teorema de Tales. A média geométrica é aplicação do Teorema de Pitágoras. Mas ambas se estruturam no conceito de triãngulo semelhantes.

2.1) <u>Quarta Proporcional (4ªpp)</u>

Quarta proporcional é o quarto termo distinto de uma proporção, onde três deles são conhecidos.

1º termo: extremo

3º termo: meio

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

2º termo: meio

4º termo: extremo

A incógnita <u>**x**</u> é a 4ª proporcional em relação aos três elementos dados.

A propriedade fundamental das proporções diz que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.
Aritmeticamente, no exemplo abaixo, o valor de x dá igualdade entre os termos da proporção.

$$\frac{10}{5} = \frac{4}{x} \longrightarrow 10.\ x = 4\ .\ 5 \longrightarrow 10.\ x = 20 \longrightarrow \mathbf{x = 2}$$

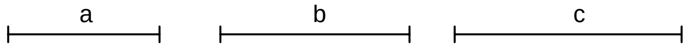
Algebricamente, temos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ **ou** $a.x = b.c$; $x = \frac{b.c}{a}$

a, b e c são conhecidos;
x é desconhecido.

Expressão algébrica da 4ª pp.

Podemos determinar graficamente a medida de <u>**x,**</u> utilizando os conceitos do Teorema de Tales.

Exemplo 7:
Dados os segmentos ***a***, ***b*** e ***c***, determinar graficamente a quarta proporcional (4ªpp), nessa ordem.



♦ <u>Resolução Algébrica</u>:

$$\frac{a}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{x}} \quad \text{OU} \quad \frac{a}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}}$$

Observe que ao trocar a posição entre o segundo e o terceiro termos na proporção o segmento <u>**x**</u> não se altera, pois a ordem dos fatores não altera o produto na multiplicação dos meios.

♦ <u>Resolução gráfica</u>:

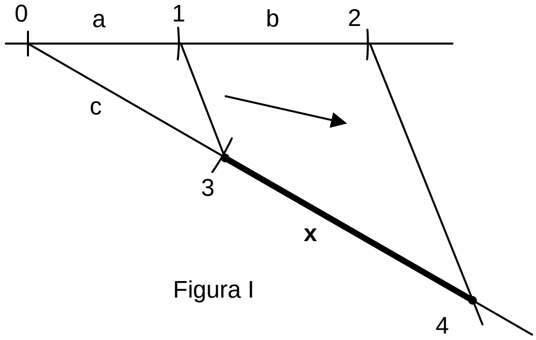


Figura I

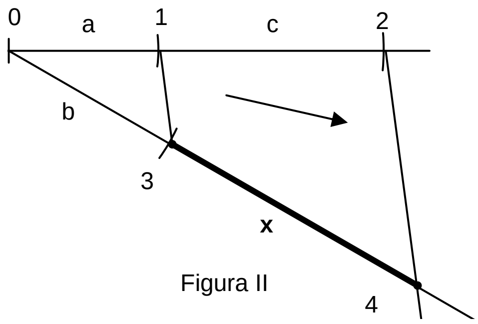


Figura II

Execução:

1) Traçar duas semirretas concorrentes em 0 (t1 e t2).

2) Transportar para a semirreta t1, a partir do ponto 0, o primeiro segmento da proporção (no caso, a), determinando o ponto 1.

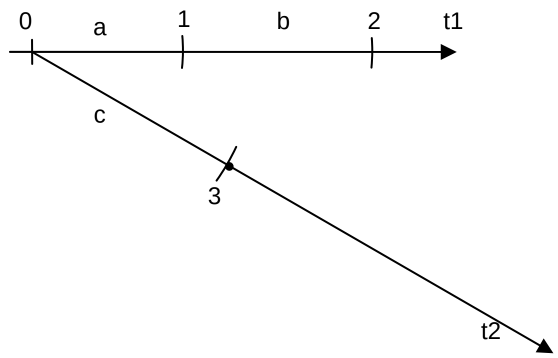
3) Transportar para a semirreta t1, a partir do ponto 1, o segundo segmento da proporção (no caso, b), determinando o ponto 2 (método aditivo: a +b).

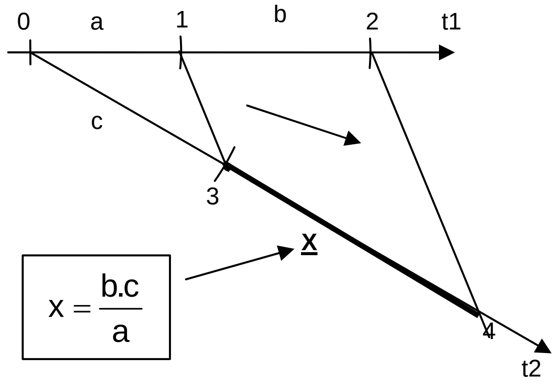
4) Transportar para a semirreta t2, a partir do ponto 0, o terceiro segmento da proporção (no caso, c), determinando o ponto 3.

5) Ligar o ponto 1 ao ponto 3 para definir a direção da reta paralela que determinará a medida de **x**.

6) Traçar reta paralela ao segmento 13, no ponto 2, determinando na semirreta t2 o ponto 4.

7) O segmento 34, contido em t2, é a 4ª pp entre os segmentos **a**, **b** e **c**, nessa ordem.



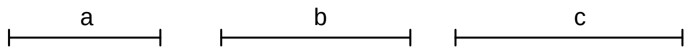


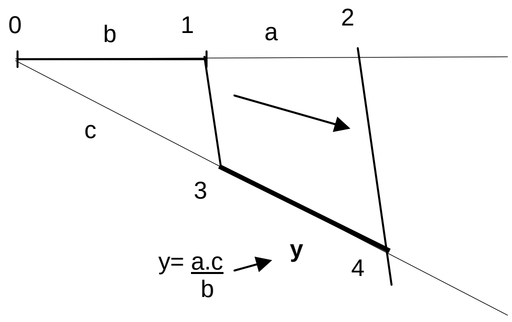
Obs: Se o primeiro termo (extremo) mudar, a expressão algébrica muda e o valor de **x** (quarta proporcional) é modificando. A ordem entre os elementos da proporção é extremamente importante.
Caso a proporção não for dada, a questão admite três soluções:

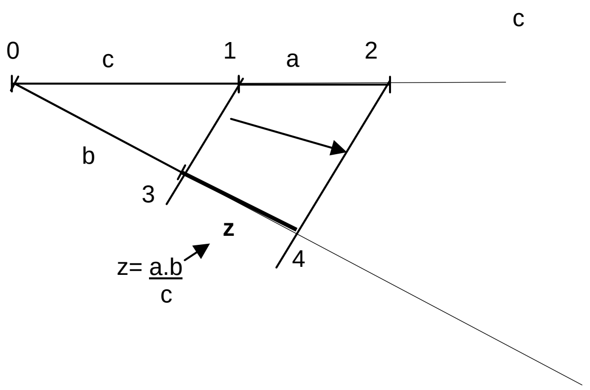
1ª solução algébrica	$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ $\quad x = \frac{bc}{a}$
2ª solução algébrica	$\frac{b}{a} = \frac{c}{y}$ $\quad y = \frac{ac}{b}$
3 ª solução algébrica	$\frac{c}{a} = \frac{b}{z}$ $\quad z = \frac{ab}{c}$

ATENÇÃO: Se o problema não indicar a proporção, considere a ordem em que os segmentos aparecem no enunciado.

Observe determinação gráfica das medidas de y e z das expressões algébricas relativas a segunda e terceira soluções:

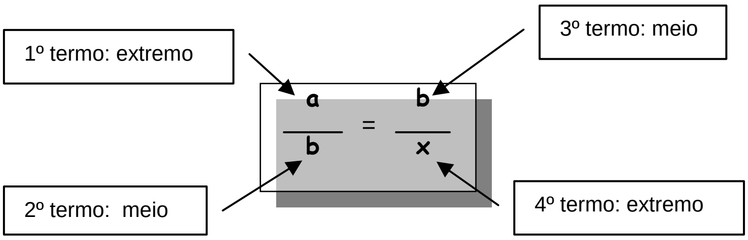






2.2) <u>Terceira Proporcional (3ªpp)</u>

Terceira proporcional é o terceiro termo distinto de uma proporção contínua (proporção que possui o 2º e 3º termos, os meios, congruentes), onde dois deles são conhecidos.



A incógnita **<u>x</u>** é a 3ª proporcional em relação aos dois elementos dados.

Aritmeticamente, no exemplo abaixo, o valor de x dá igualdade entre os termos da proporção.

$$\frac{10}{5} = \frac{5}{x} \longrightarrow 10 . x = 5 . 5 \longrightarrow 10 . x = 25 \longrightarrow \mathbf{x = 2{,}5}$$

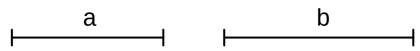
Algebricamente temos: $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ **ou** $a.x = b.b$; $x = \frac{b^2}{a}$

a e b são conhecidos;
x é desconhecido.

Expressão algébrica da 3ª pp.

Assim como na quarta proporcional, utilizamos o Teorema de Tales para determinar graficamente a medida de **<u>x.</u>**

Exemplo 8:
Dados os segmentos ***a*** e ***b***, determinar graficamente a terceira proporcional (3ªpp), nessa ordem.

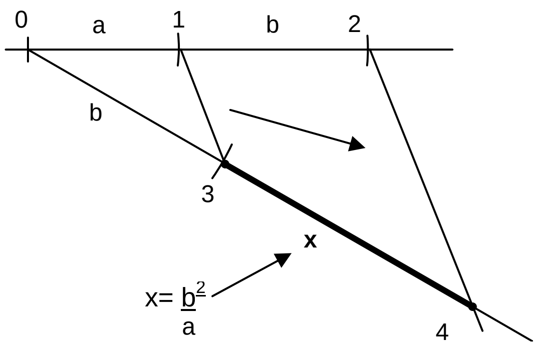


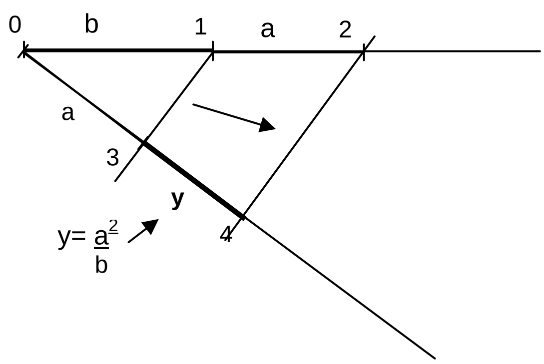
♦ <u>Resolução Algébrica</u>:

$$\frac{a}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}} \quad \text{OU} \quad \frac{b}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{y}}$$

Caso da ordem dos termos da proporção não for dada, a questão admite duas soluções, conforme o exemplo ao lado.

♦ <u>Resolução Gráfica</u>:





2.3) Média geométrica ou média proporcional

É a raiz quadrada do produto de duas grandezas. Dito de outro modo: é o valor encontrado para os meios, que no caso se repetem.

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9} \longrightarrow x^2 = 4 \,.\, 9 \longrightarrow x = \sqrt{36} \longrightarrow \mathbf{x = 6}$$

$$\boxed{\frac{a}{x} = \frac{x}{b}} \quad \text{ou} \quad x^2 = a.b \quad ; \quad x = \sqrt{a.b}$$

a e **b** são conhecidos;
x se repete e é desconhecido.

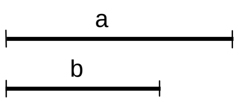
A média geométrica entre duas grandezas (ou dois segmentos dados) é a raiz quadrada do seu produto.

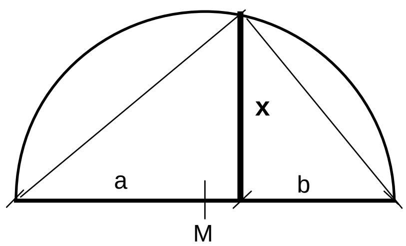
A resolução gráfica de problemas que envolvem a média geométrica tem por base o triângulo retângulo. Há duas possibilidades: por adição ou por subtração.

⇨ **Por adição**:

- *A altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre as projeções dos catetos.*

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \qquad x^2 = a.b \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a.b}$$

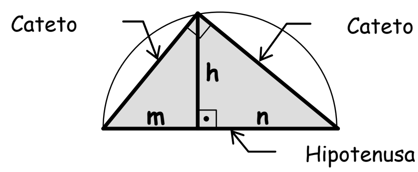




M – centro da semicircunferência (Arco capaz de 90º)

OBS: O fundamento do processo aditivo da Média Geométrica baseia-se numa das relações métricas do triângulo retângulo:

"A altura (**h**) de um triângulo retângulo é a média proporcional entre as projeções (**m** e **n**) dos catetos na a hipotenusa".

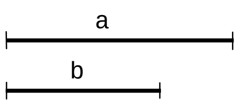


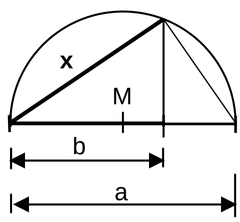
$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Leftrightarrow h^2 = m.n \Leftrightarrow h = \sqrt{m.n}$$

⇨ **Por subtração**:

- *Cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela.*

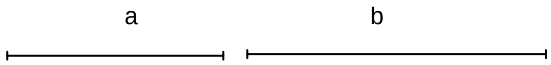
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \qquad x^2 = a.b \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a.b}$$

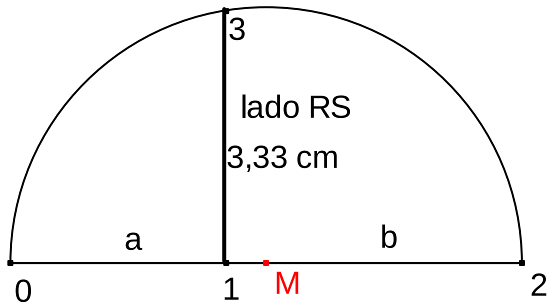


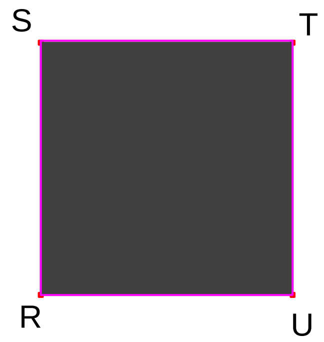


M – centro da semicircunferência

Exemplo 9:
Dados os segmentos ***a*** e ***b***, construa o quadrado RSTU cujo lado é a média geométrica entre os segmentos dados.

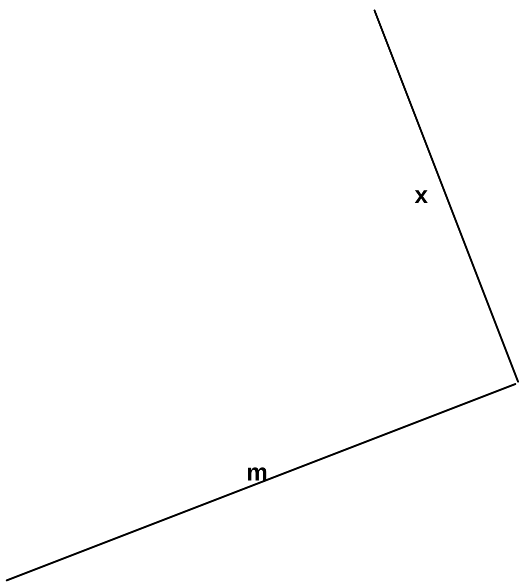


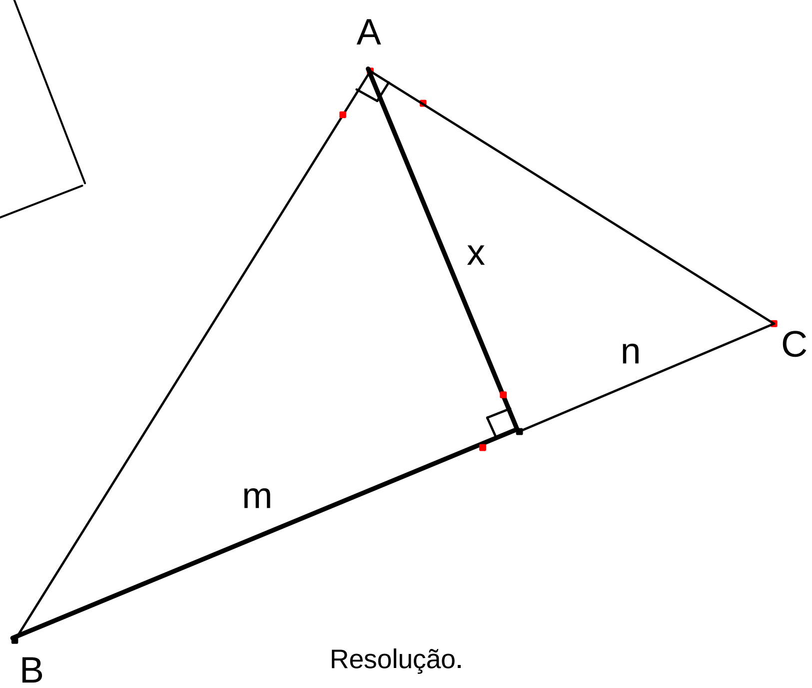




Exemplo 10:

Dados os segmentos perpendiculares **m** e **x**, construa o triângulo retângulo ABC, sabendo que **m** é a projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ e que **x** é a altura relativa à hipotenusa **a**.





Resolução.