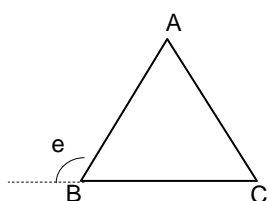


# TRIÂNGULOS

## ⇒ CONCEITO

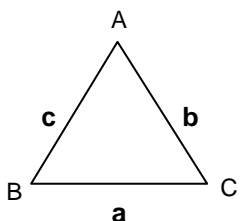
Triângulo é um polígono de três lados. Representa-se:  $\Delta ABC$ .

## ⇒ ELEMENTOS



- ♦ três vértices: A, B, C
- ♦ três lados:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$
- ♦ três ângulos internos:  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ .
- ♦ três ângulos externos formados por um lado e o prolongamento do outro.

Convém ainda observar que nos triângulos:



- ♦ o vértice **A** e o ângulo interno **A** são opostos ao lado  $\overline{BC}$ , de medida **a**;
- ♦ o vértice **B** e o ângulo interno **B** são opostos ao lado  $\overline{CA}$ , de medida **b**;
- ♦ o vértice **C** e o ângulo interno **C** são opostos ao lado  $\overline{AB}$ , de medida **c**.

**OBS:** Cada lado recebe a letra minúscula que corresponde à letra do vértice oposto a ele.

## ⇒ CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

| QUANTO AOS LADOS  |  |   |
|---|--|---|
| <b>TRIÂNGULO ESCALENO</b><br><br>Três lados de medidas diferentes<br>Três ângulos internos diferentes | <b>TRIÂNGULO ISÓSCELES</b><br><br>Dois lados congruentes<br>Dois ângulos internos congruentes. | <b>TRIÂNGULO EQUILÁTERO</b><br><br>É o único $\Delta$ regular.<br>Seus lados e ângulos internos são congruentes (medem $60^\circ$ ) |

| QUANTO AOS ÂNGULOS INTERNOS                                     |  |  |
|---|--|--|
| <b>TRIÂNGULO ACUTÂNGULO</b><br><br>Três ângulos internos agudos | <b>TRIÂNGULO RETÂNGULO</b><br><br>Hipotenusa<br>Cateto | <b>TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO</b><br><br>Um ângulo interno obtuso |

Em qualquer triângulo:



a soma dos três ângulos internos é sempre igual a  $180^\circ$ ;



a soma do ângulo interno com o externo adjacente é sempre igual a  $180^\circ$ ;

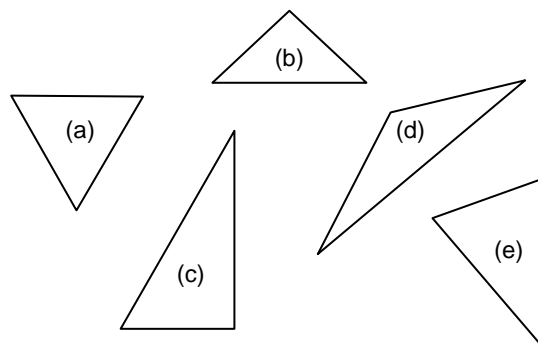


a soma de dois ângulos internos é sempre igual a medida do ângulo externo não adjacente.

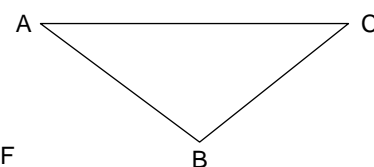
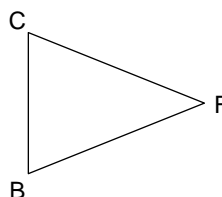
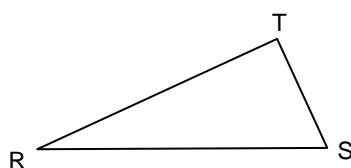
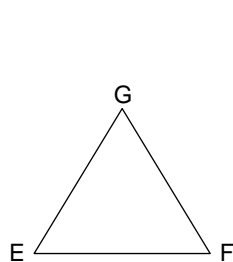
### EXERCÍCIOS:

1. Classifique os triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos:

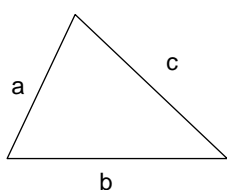
- a) .....
- b) .....
- c) .....
- d) .....
- e) .....



2. Identifique com letras minúsculas os lados do triângulo:



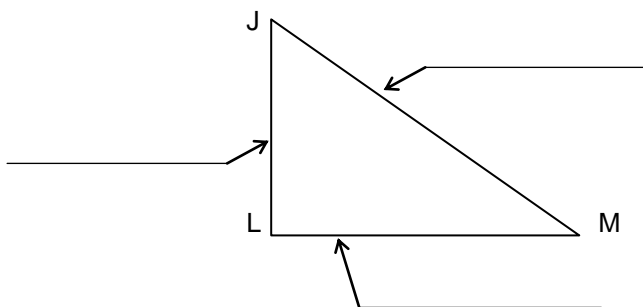
3. Identifique com letras os VÉRTICES do triângulo. Em seguida responda:



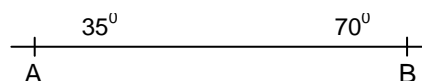
O que representa  $a + b + c$  ?

.....

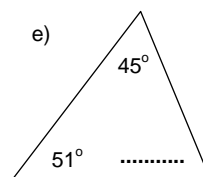
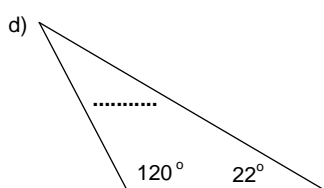
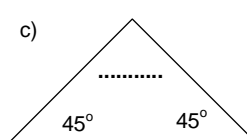
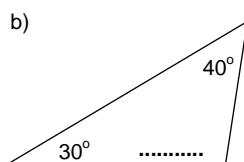
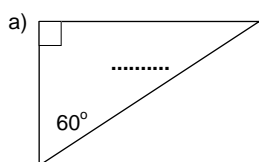
4. Identifique os lados do triângulo retângulo:



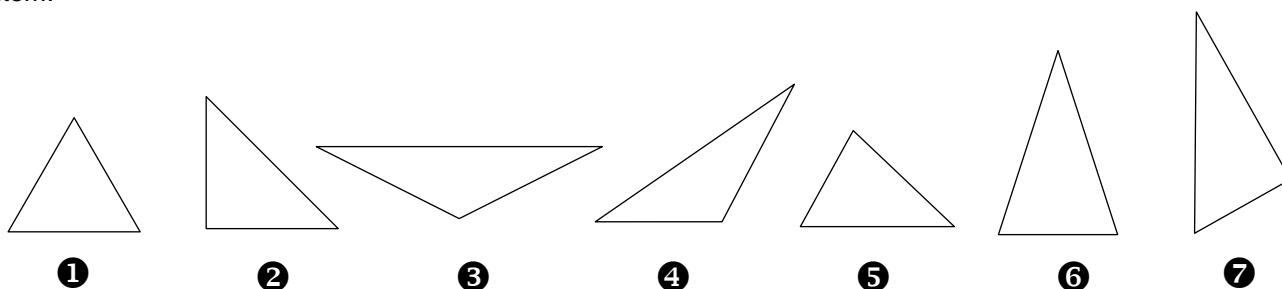
5. Construa:  $\triangle ABC$  usando o transferidor:



6. Determine a medida dos ângulos internos dos triângulos abaixo, sem o auxílio do transferidor:



7. Observe os triângulos apresentados e responda às questões escrevendo **apenas uma opção** para cada item.



- a) A fig. .... é um triângulo obtusângulo isósceles.  
 b) A fig. .... é um triângulo retângulo escaleno.  
 c) A fig. .... é um triângulo acutângulo isósceles.  
 d) A fig. .... é um triângulo equilátero.  
 e) A fig. .... é um triângulo acutângulo escaleno.

8. Complete as lacunas para que as sentenças sejam verdadeiras.

- a) No triângulo ....., o lado oposto ao ângulo reto chama-se ..... e os dois lados do ângulo reto são chamados de .....
- b) Quanto ao tamanho dos lados, os triângulos se classificam em: ..... e .....
- c) O triângulo que possui um ângulo interno obtuso chama-se.....
- d) Um triângulo ..... possui todos os ângulos internos agudos.

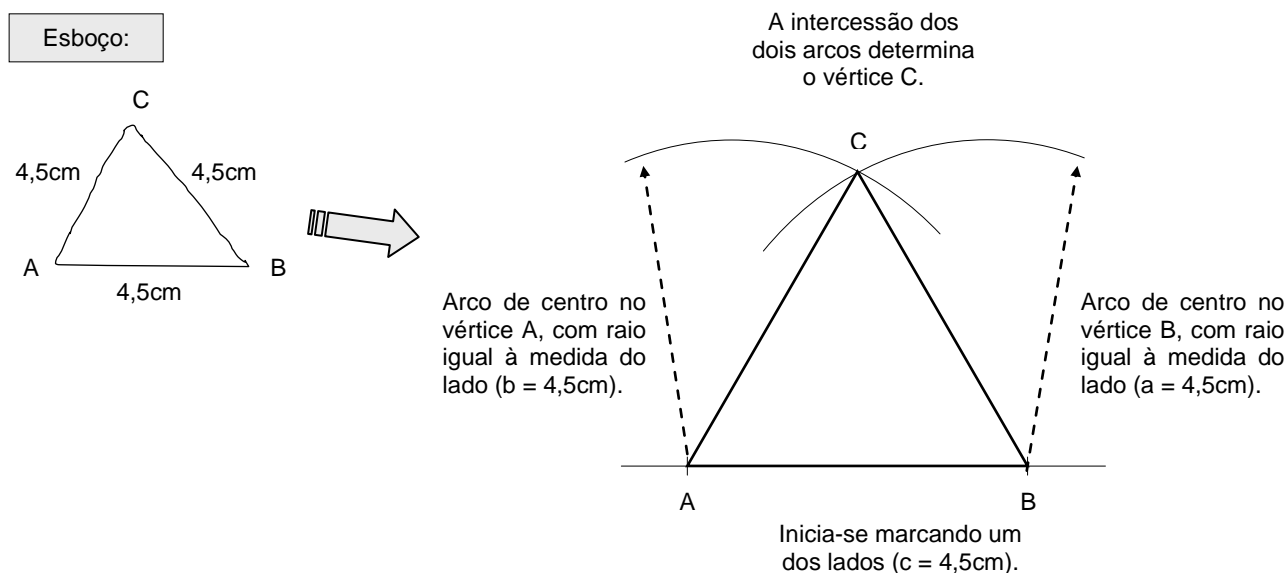
## TRIÂNGULOS: Construção

Algumas orientações:

- Os instrumentos utilizados na construção de triângulos são: régua, compasso e transferidor (quando se tratar de ângulos).
- Antes de construir a figura, procure esboçá-la, a mão livre, no intuito de “visualizar” como o triângulo ficará depois de pronto, ou seja, ter uma prévia do que será construído. O objetivo do esboço é reunir as informações necessárias para a construção, sem se preocupar com a exatidão das medidas.
- Feito o esboço, inicia-se a construção do triângulo utilizando corretamente as medidas dadas. Nesse momento, procure utilizar uma linha fina clara. Ao final, quando o problema estiver resolvido, destaque o triângulo com uma linha forte, mais escura.

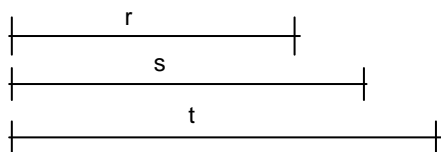
### ♦ Construção de triângulos, dados os lados:

Exemplo: Construa o  $\triangle ABC$  equilátero, cujos lados medem 4,5cm.



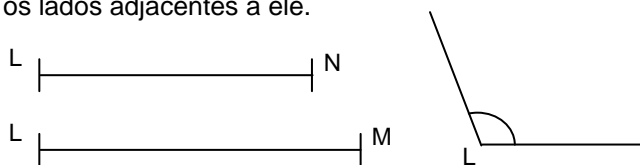
**EXERCÍCIOS:**

1. Construa o triângulo RST conhecendo-se os seus lados.



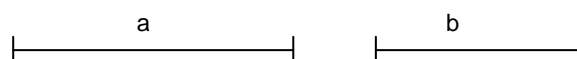
2. Construa o triângulo isósceles DEF sabendo que o lado d (base) mede 40 mm e o ângulo oposto a esse lado é igual a  $40^\circ$ .

3. Construa o triângulo LMN conhecendo um ângulo e os lados adjacentes a ele.



4. Construa o triângulo MNP.

$$\overline{MN} = \overline{MP} = a \quad \overline{PN} = b$$



Utilizando os instrumentos adequados, construa os triângulos abaixo e represente todas as soluções possíveis dentro do espaço de cada questão.

5.  $\Delta$  Equilátero PUF, conhecendo os vértices P e U.

♦ **ANÁLISE**

Por qual segmento de reta pode-se iniciar a construção? \_\_\_\_\_

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_

P  
+

+ U

6.  $\Delta$  Isósceles EBA, conhecendo o lado EB e sabendo que o lado congruente BA= 4,5cm.

♦ **ANÁLISE**

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_



7.  $\Delta$  ABC sabendo que AB=5cm, a=2,5cm e b=4cm.

Quais as classificações do triângulo? \_\_\_\_\_

♦ **ANÁLISE**

Por qual segmento de reta pode-se iniciar a construção? \_\_\_\_\_

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_

8.  $\triangle$  Obtusângulo isósceles TAM, de lado congruente  $TA = 4\text{cm}$  e ângulo  $T = 120^\circ$ .

♦ **ANÁLISE**

Por qual segmento de reta pode-se iniciar a construção? \_\_\_\_\_

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_

9.  $\triangle$  Escaleno LUA de lados  $LU = 5\text{cm}$ ,  $UA = 4\text{cm}$  e ângulo  $L = 45^\circ$ .

♦ **ANÁLISE**

Por qual segmento de reta pode-se iniciar a construção? \_\_\_\_\_

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_

10.  $\triangle$  DEF sabendo que o lado  $DE = 5\text{cm}$ , lado  $e = 6\text{cm}$  e ângulo  $E = 110^\circ$ . Quais as classificações do triângulo? \_\_\_\_\_

♦ **ANÁLISE**

Por qual segmento de reta pode-se iniciar a construção? \_\_\_\_\_

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_

11.  $\Delta$  Retângulo ONG a partir do cateto ON e sabendo que o outro cateto  $NG=3,5\text{cm}$

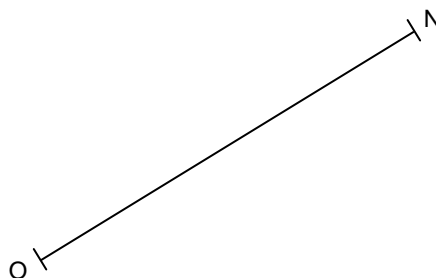
♦ **ANÁLISE**

Por qual segmento de reta pode-se iniciar a construção? \_\_\_\_\_

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_



12.  $\Delta$  Retângulo CDE sabendo que o cateto **c** e a hipotenusa **d** medem, respectivamente, 4,5cm e 5,5cm.

♦ **ANÁLISE**

Por qual segmento de reta pode-se iniciar a construção? \_\_\_\_\_

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_

13.  $\Delta$  Escaleno ORG sabendo que o lado  $OR=6,5\text{cm}$  e ângulos  $O=35^\circ$  e  $R=75^\circ$ .

♦ **ANÁLISE**

Por qual segmento de reta pode-se iniciar a construção? \_\_\_\_\_

Qual vértice (ponto-chave) será determinado? \_\_\_\_\_

Quais linhas serão traçadas para se determinar o ponto procurado? \_\_\_\_\_

Quantas soluções existem para o ponto procurado? \_\_\_\_\_



## LINHAS E PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

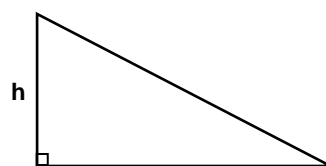
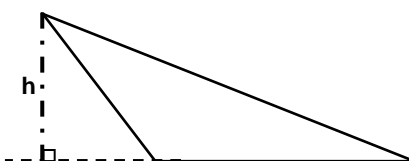
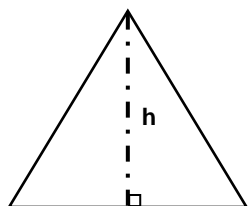
- **ALTURA (h)**

É a reta **perpendicular** a um lado, ou ao seu prolongamento, e que passa pelo vértice oposto a esse lado. A altura pode ser:

Interna – triângulo acutângulo

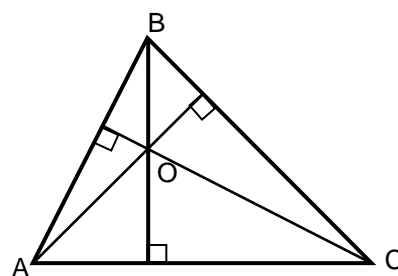
Externa – triângulo obtusângulo (relativa aos lados que formam o ângulo obtuso)

Coincidente com um dos lados – triângulo retângulo (relativa aos lados que formam o ângulo reto)



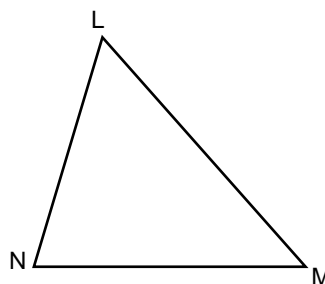
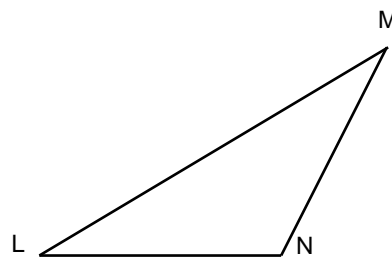
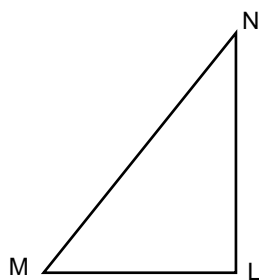
♦ Todo triângulo possui três alturas, cada uma delas relativa a um dos lados. O encontro das três alturas determina um ponto denominado **ORTOCENTRO**.

O - Ortocentro



### EXERCÍCIOS:

1. Represente a altura **h** relativa ao lado **m** de cada um dos triângulos abaixo.



2. Construa e classifique os triângulos a seguir, conforme as informações dadas.

a)  $\triangle LMN$

$\overline{LM} = 50 \text{ mm}$

$\hat{L} = 70^\circ$

Altura relativa ao lado  $n = 25\text{mm}$

b)  $\triangle LMN$

$\overline{LM} = 50 \text{ mm}$

$\overline{LN} = 35 \text{ mm}$

Altura relativa ao lado  $n = 25\text{mm}$

c)  $\triangle RUA$ , de lados  $\mathbf{RU}$  e  $\mathbf{r}$  conhecidos e ângulo  $R = 45^\circ$ .

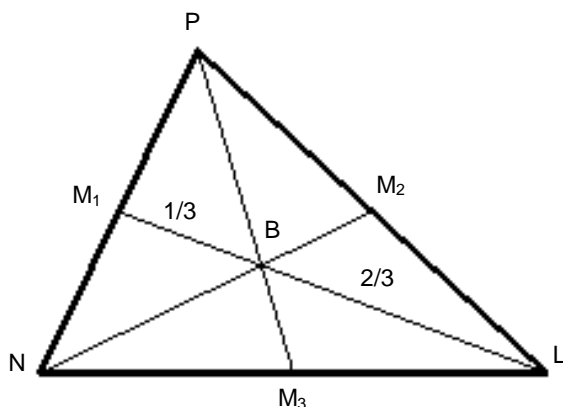
$\overline{r}$

$\mathbf{R} \quad \overline{\quad} \quad \mathbf{U}$

- **MEDIANA**

É a reta que passa pelo ponto médio do lado e pelo vértice oposto a esse lado. O encontro das medianas determina um ponto denominado **BARICENTRO**.

♦ O **BARICENTRO** é o centro de gravidade (ponto de equilíbrio) do triângulo. O baricentro está localizado a  $\frac{2}{3}$  do vértice do triângulo, o que equivale dizer, que ele está a  $\frac{1}{3}$  do lado.

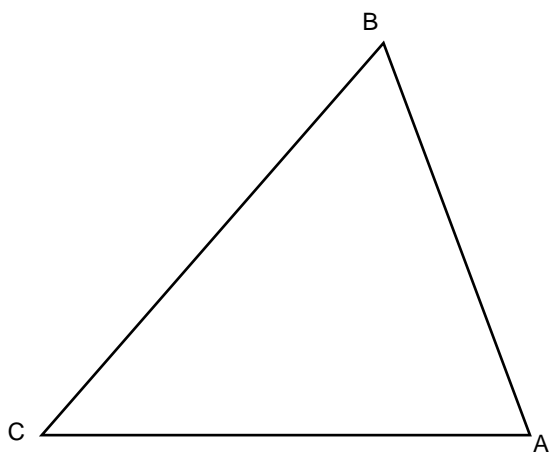


**B – BARICENTRO**

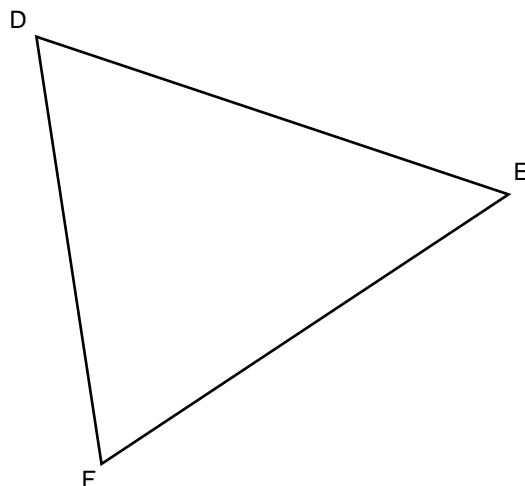
**M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub> e M<sub>3</sub>** – pontos médios dos lados

**EXERCÍCIOS:**

1. Represente a mediana **m** relativa ao lado **a** do triângulo ABC.



2. Determine o baricentro **B** do triângulo DEF.

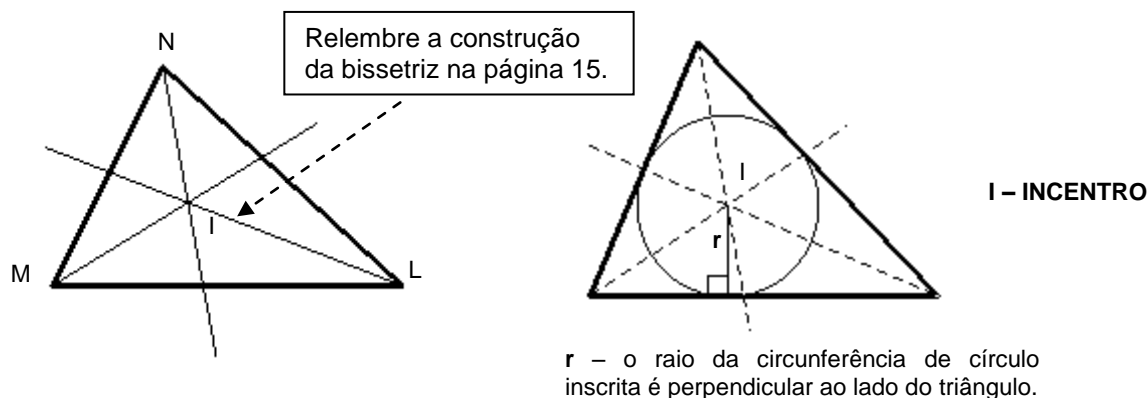


**Dica:** Para determinar o ponto médio do lado é necessário traçar a mediatriz.

### • BISSETRIZ INTERNA

É a reta que divide o ângulo interno de um triângulo em duas partes iguais. O encontro das bissetrizes determina um ponto denominado INCENTRO.

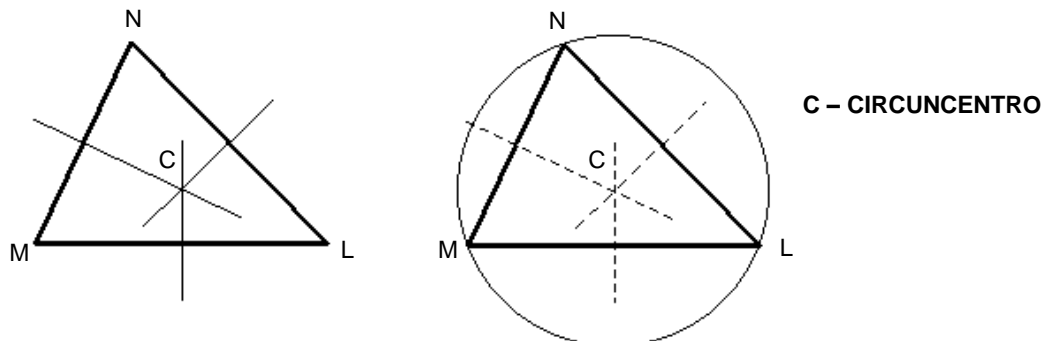
♦ O **INCENTRO** é o centro da circunferência inscrita no triângulo. Os lados do triângulo serão tangentes à circunferência do círculo. O incentro equidista dos lados do triângulo.



### • MEDIATRIZ

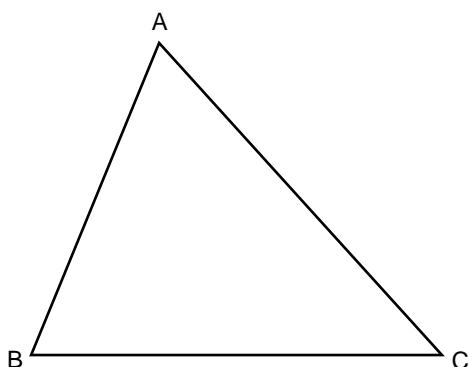
É a reta que divide o lado do triângulo em duas partes iguais. O encontro das mediatrizes determina um ponto denominado CIRCUNCENTRO. Os lados do triângulo serão cordas da circunferência.

♦ O **CIRCUNCENTRO** é o centro da circunferência de círculo que circunscreve o triângulo. O circuncentro equidista dos vértices do triângulo.

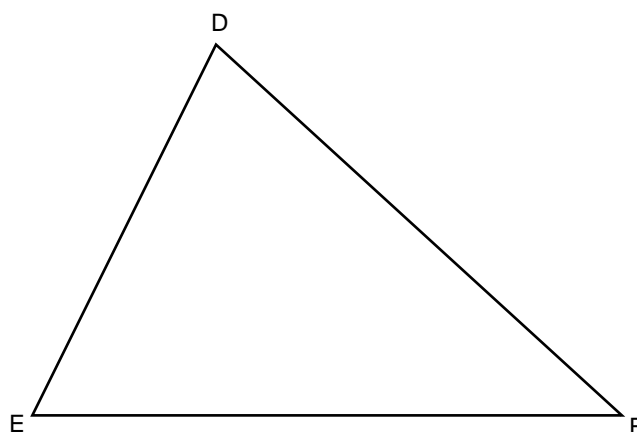


### EXERCÍCIOS:

1. Construa a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.



2. Construa a circunferência inscrita ao triângulo DEF.



♦ No **triângulo equilátero** a altura, a mediana, a bissetriz e a mediatriz, relativas a qualquer um dos lados, serão coincidentes. Portanto, os pontos notáveis também serão coincidentes.

♦ No **triângulo isósceles**, a altura, a mediana, a bissetriz e a mediatriz, relativas à base (lado diferente), serão coincidentes. Os pontos notáveis **não** serão coincidentes.

Se você fez os exercícios propostos, conscientemente, deve ter observado que:

### ⇒ ORTOCENTRO

- ♦ No triângulo acutângulo (não importa se é escaleno, isósceles ou equilátero) fica no interior do triângulo.
- ♦ No triângulo retângulo (não importa se é escaleno ou isósceles) coincide com o vértice do ângulo reto do triângulo.
- ♦ No triângulo obtusângulo (não importa se é escaleno ou isósceles) fica no exterior do triângulo.

### ⇒ CIRCUNCENTRO

- ♦ No triângulo acutângulo (não importa se é escaleno, isósceles ou equilátero) fica no interior do triângulo.
- ♦ No triângulo retângulo (não importa se é escaleno ou isósceles) fica no ponto médio da hipotenusa do triângulo.
- ♦ No triângulo obtusângulo (não importa se é escaleno ou isósceles) fica no exterior do triângulo.

### ⇒ BARICENTRO E INCENTRO

♦ Ficam sempre no interior do triângulo, independente se é escaleno, isósceles, equilátero, acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

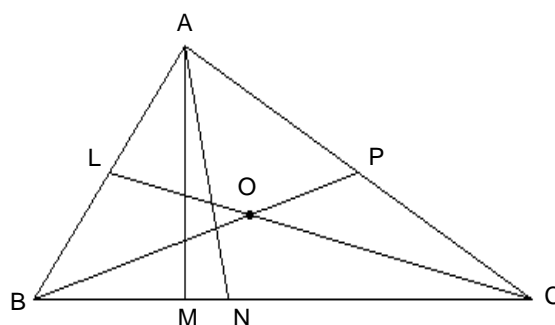
## EXERCÍCIOS

### 1. Falso ou verdadeiro?

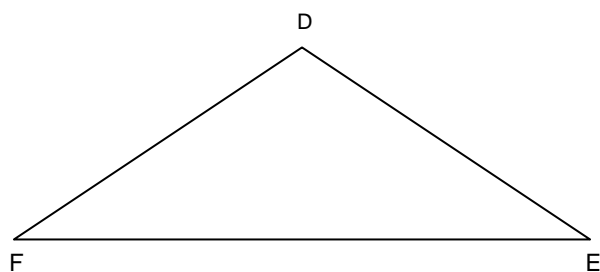
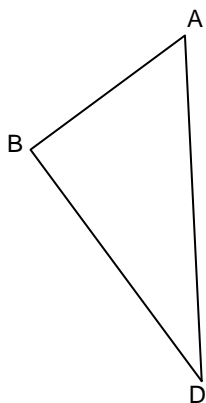
- ( ) As medianas são retas que determinam os pontos médios dos lados de um triângulo.
- ( ) O baricentro está situado na metade de cada mediana de um triângulo.
- ( ) Os lados de um triângulo são tangentes à circunferência de círculo inscrita nesse triângulo.
- ( ) O centro da circunferência de círculo circunscrita a um triângulo equidista dos lados desse mesmo triângulo.
- ( ) Altura de um triângulo é o segmento que possui uma extremidade no vértice e é perpendicular ao lado oposto a esse vértice.

### 2. Complete as lacunas.

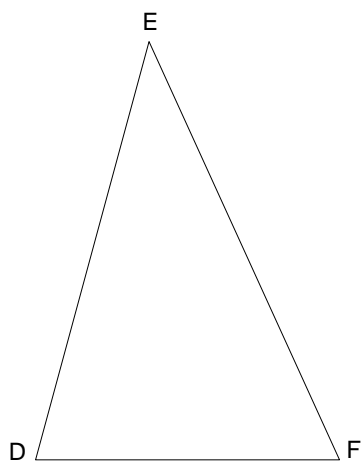
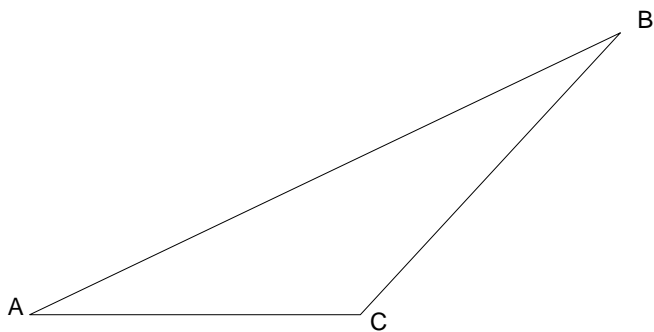
- a) O segmento NA é a ..... relativa ao lado a.
- b) O segmento AM é a ..... relativa ao lado a.
- c)  $\overline{CL}$  é a ..... relativa ao lado .....
- d) O ponto O é o .....
- e)  $\overline{BO}$  é igual a ..... da medida do segmento BP.



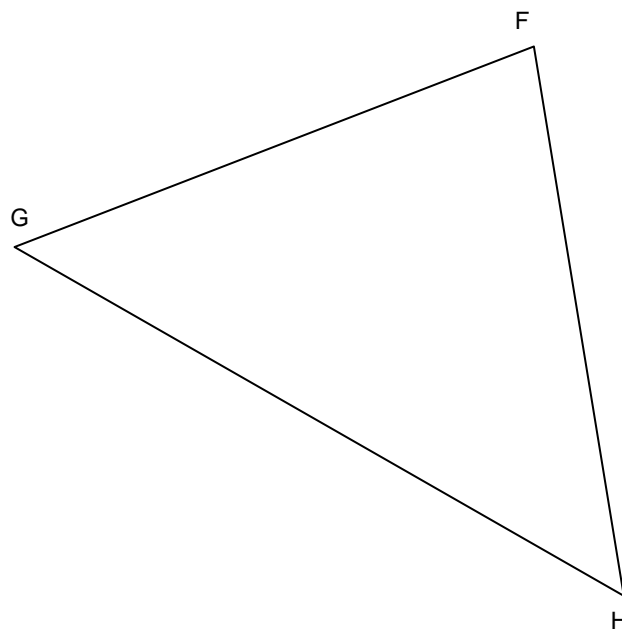
3. Determine o circuncentro **C** dos triângulos dados abaixo e construa as circunferências de círculos circunscritas.



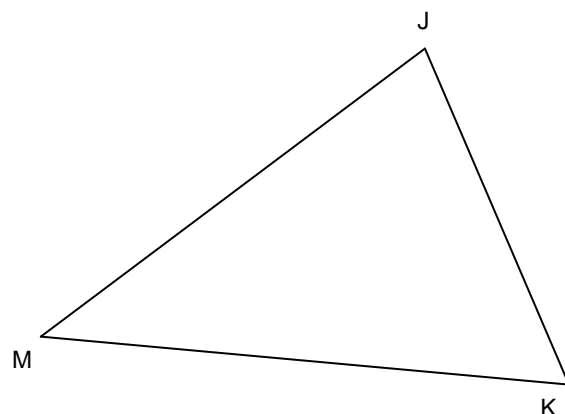
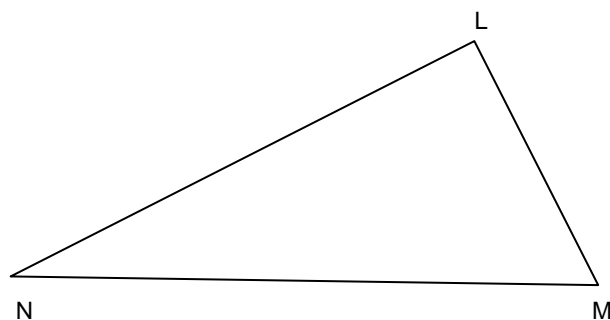
5. Determine o baricentro **B** dos triângulos dados abaixo.



4. Determine o incentro **I** do triângulo dado abaixo e construa a circunferência inscrita.



6. Determine o ortocentro **O** dos triângulos dados abaixo.



7. Construa o triângulo ABC dados os vértices A e B e o ponto G, baricentro do triângulo.



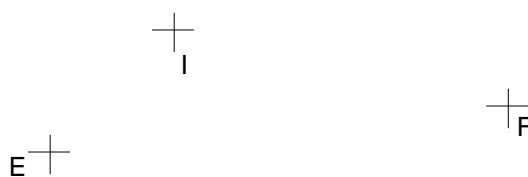
8. Construa o triângulo ABC dados o ponto **C** e o ponto médio **Ma**.

AC = 50 mm

Mediana relativa ao lado a = 40 mm



9. Construa o triângulo EFG dados o seu incentro **I** e dois de seus vértices.



**10.** O desenho abaixo foi criado por profissional da área gráfica. É o que chamamos de símbolo gráfico de um logotipo e serve para representar uma empresa, eventos, cultos, etc. Analise a construção geométrica e refaça o desenho com outras medidas, porém procurando manter a mesma proporção.

**Dicas:**

Classifique os triângulos abaixo:

O triângulo ABC é .....

O triângulo BDE é .....

O triângulo BEF é .....

Verifique se:  $\overline{BF} \cong \overline{FD}$  ( ) sim ( ) não

$\overline{AE} \cong \overline{EF}$  ( ) sim ( ) não

$\overline{EC} \cong \overline{BC}$  ( ) sim ( ) não

Centre o compasso no vértice C.

A circunferência passa por B, E e D? \_\_\_\_\_

